Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики — процессов управления
Кафедра теории управления

Анисимова Анна Михайловна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Конструктивный подход к анализу устойчивости линейных систем с распределённым запаздыванием

Направление 010400
Прикладная математика и информатика

Заведующий кафедрой,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Жабко А.П.

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент Александрова И. В.

Рецензент,
старший преподаватель Пономарёв А. А.

Санкт-Петербург
2017

Содержание

Введение

Для описания реальных процессов в математическом моделировании часто используются обыкновенные дифференциальные уравнения, в которых скорость процесса зависит от его состояния в данный момент времени. Однако рассмотрение некоторого числа предыдущих состояний наряду с текущим приводит к моделям, более точно отражающим действительность, — уравнениям с запаздыванием.

На практике моменты времени, в которые состояние системы оказывает влияние на текущую скорость процесса, не всегда могут быть точно определены. Более того, встречаются ситуации, в которых поведение системы определяется ее предшествующими состояниями на непрерывном временном промежутке. Такой совокупный эффект запаздывания выражается интегралом, стоящим в правой части системы, и получил название распределенного запаздывания.

Системы с распределенным запаздыванием активно используются в различных областях знания: в химии, медицине, технике, экологии, экономике, биологии и др. Например, обобщённое уравнение Хатчинсона [1] — одна из широко известных биологических моделей — описывает динамику численности видов животных с учётом ограниченности ресурсов (доступной пищи, размера территории обитания и др.)

Как в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, так и в теории уравнений с запаздывающим аргументом важной задачей является задача анализа устойчивости. На примере обобщённого уравнения Хатчинсона [1] устойчивость решения этого уравнения означает воможность для популяции вида вернуться к равновесному состоянию.

Для анализа устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием применяется обобщение второго метода Ляпунова на данный класс систем — метод функционалов Ляпунова - Красовского. Согласно известной теореме Красовского [2], для анализа устойчивости требуется функционал, имеющий отрицательно определенную производную вдоль решений системы и допускающий квадратичные оценки снизу и сверху. Такой функционал найден в работе В.Л. Харитонова и А.П. Жабко [3]. При этом использован следующий подход: построен квадратичный функционал, имеющий заранее заданную отрицательно определенную производную вдоль решений системы, а затем доказано, что этот функционал допускает квадратичную оценку снизу в случае экспоненциальной устойчивости системы.

В работах И.В. Медведевой и А.П. Жабко (см. [4, 5] для систем с сосредоточенным и [6] для систем с распределенным запаздыванием) показано, что для проверки устойчивости достаточно иметь функционал, допускающий квадратичную оценку снизу только на специальном множестве функций, удовлетворяющих аналогу условия Разумихина. В [4, 5] предложена группа конструктивных методов анализа устойчивости линейных дифференциально-разностных систем с сосредоточенным запаздыванием.

Данная работа посвящена обобщению методов [4,5] на случай систем с распределённым запаздыванием. Разработан конструктивный подход к анализу устойчивости таких систем на примере линейного дифференциального уравнения с распределённым запаздыванием.

Постановка задачи

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с распределённым запаздыванием:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t-h) + \int\limits_{-h}^{0} g(\theta)x(t+\theta)d\theta, \tag{1}$$

где a, b — заданные вещественные постоянные, $h > 0$ — запаздывание, $g(\theta)$ — непрерывная функция, определённая при $\theta \in [-h, 0]$.

Если задано начальное время $t_0 \geqslant 0$ и начальная функция $\varphi(\theta)$, кусочно-непрерывная на $\theta \in [-h, 0]$, то начальная задача заключается в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего следующему условию:

$$x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta), \;\; \theta \in [-h, 0].$$

Здесь и в дальнейшем будем полагать $t_0 = 0$. Решение начальной задачи будем обозначать через $x(t, \varphi)$. Оно существует и единственно, определено на промежутке $[-h, +\infty)$.

Сегмент решения уравнения (1) на отрезке $[t-h,\ t]$ — состояние уравнения, обозначим:

$$x_t(\varphi) : \theta \to x(t+\theta, \varphi), \;\; \theta \in [-h, 0].$$

Определение. Уравнение (1) называется экспоненциально устойчивым [8], если существуют постоянные $\gamma \geqslant 1$ и $\sigma > 0$, такие что для любого решения уравнения выполняется

$$|x(t, \varphi)| \leqslant \gamma e^{-\sigma t} |\varphi|_h, \ t \geqslant 0,$$

где $|\varphi|_h = \sup\limits_{\theta \in [-h, 0]} |\varphi(\theta)|$.

Поставлена задача разработки конструктивного метода анализа устойчивости линейного дифференциального уравнения с распределённым запаздыванием (1). Требуется получить и реализовать в программной среде MATLAB эффективный алгоритм анализа устойчивости данного уравнения.

Обзор литературы

Общие вопросы теории устойчивости систем с запаздыванием рассмотрены в работах А. Д. Мышкиса [7], Р. Беллмана и К. Л. Кука [8].

В работе [9] А. М. Ляпунов вводит два основных подхода к анализу устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений, позднее названные как первый и второй методы Ляпунова. Их обобщения используются для систем дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Первый метод состоит в анализе корней характеристического уравнения системы. Расположение всех корней в открытой левой полуплоскости комплексной плоскости эквивалентно экспоненциальной устойчивости системы.

Второй метод Ляпунова был обобщён на системы с западыванием двумя различными способами. В статье [10] Б.С. Разумихин применяет модифицированный метод функций Ляпунова, исследуя отрицательность производной только вдоль решений системы, удовлетворяющих особому ограничению — условию Разумихина. Практически в одно время с ним появляется метод функционалов Ляпунова - Красовского [11], основанный на теореме Красовского [2]: достаточным условием устойчивости является существование положительно-определённого функционала, имеющего отрицательно-определённую проиводную вдоль решений системы.

Впервые вопрос построения функционала с заданной производной исследован в работе Ю.М. Репина [12]. Затем данный подход получил развитие в работах R. Datko [13] , E. F. Infante и W. B. Castellan [14]. Функционал, производная которого представляет собой отрицательно определенную квадратичную форму вектора $x(t)$, а также условия его существования получены в работе W. Huang [15]. Однако, в случае экспоненциальной устойчивости он допускает лишь локальную кубическую оценку снизу, а для эффективного анализа устойчивости требуется квадратичная оценка.

В работе [3] В.Л. Харитоновым и А.П. Жабко построен функционал полного типа: в производную добавлены слагаемые, определяемые полным состоянием системы x_t, а не только вектором $x(t)$. Доказано, что этот функционал допускает квадратичную оценку снизу, если система экспоненциально устойчива. Как функционал, полученный в работе [15], так и функционал полного типа определяются особой функциональной матрицей – матрицей Ляпунова.

Обобщению теории функционалов с заданной производной на случай распределенного запаздывания посвящены работы [17, 18]. В статье [18] показано, что для некоторого частного класса систем с распределенным запаздыванием матрица Ляпунова может быть найдена как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, удовлетворяющее специальному набору граничных условий. Задача о вычислении матрицы Ляпунова также рассмотрена в работе [19]. Все перечисленные вопросы, а также некоторые другие аспекты теории функционалов с заданной производной затронуты в монографии [20].

В работах И.В. Медведевой и А.П. Жабко [4–6] предложен другой подход к анализу устойчивости, сочетающий метод функционалов Ляпунова - Красовского [11] и метод Раумихина [10]. Доказано, что, хотя для функционала, построенного в работе [15], не существует квадратичной оценки снизу на множестве всех кусочно-непрерывных функций, он допускает такую оценку на более узком множестве функций, удовлетворяющих аналогу условия Разумихина. В терминах существования такой оценки получен критерий экспоненциальной устойчивости, на основе которого для систем с сосредоточенным запаздыванием разработана группа конструктивных методов анализа устойчивости.

В данной работе эти методы распространяются на случай систем с распределенным запаздыванием.

§1 Предварительные сведения

п. 1.1 Определения и обозначения

В работе используются следующие обозначения:

$C([-h,0],R)$ — пространство непрерывных функций $\varphi : [-h,0] \to R$

$PC([-h,0],R)$ — пространство кусочно-непрерывных функций $\varphi : [-h,0] \to R$

$C^k([-h,0],R)$ — пространство k-раз непрерывно дифференцируемых функций

$\varphi : [-h,0] \to R$

Функционал представляет собой отображение $v : PC([-h,0],R) \to R$.

Определение. Функционал $v(\varphi)$ непрерывен в нуле (непререрывен в точке 0_h) [20], если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 : |\varphi|_h < \delta \Rightarrow |v(\varphi)| < \varepsilon,$$

где нулевая функция $0_h(\theta) = 0,\ \theta \in [-h,0]$.

Пусть непрерывный в нуле функционал $v(\varphi)$ определён на множестве функций φ таких, что $\varphi \in PC([-h,0],R)$ и $|\varphi|_h \leqslant H,\ H > 0$.

Определение. Говорят, что непрерывный в нуле функционал $v(\varphi)$ $(v(0_h) = 0)$ положительно определён [20], если найдётся положительно-определённая функция $f(x)$ такая, что $v(\varphi) \geqslant f(\varphi(0))$.

Определение. Функционал $v(\varphi)$ отрицательно определён, если $v_1(x) = -v(x)$ — положительно определён.

Пусть скалярная функция $f(x)$ определена и непрерывна на множестве $|x| \leqslant H, H > 0$.

Определение. Функция $v(\varphi)$ положительно определена [20], если

$$f(0) = 0,\ f(x) > 0 \text{ при } |x|\ > 0.$$

Определение. Характеристическое уравнение [8] для (1)

$$\lambda - a - be^{-\lambda h} - \int\limits_{-h}^{0} g(\theta)e^{\lambda\theta}d\theta = 0.$$

Корни этого уравнения называются собственными числами уравнения (1).

Утверждение. *Уравнение (1) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда вещественные части всех его собственных чисел отрицательны [8].*

п. 1.2 Критерий экспоненциальной устойчивости

Введём множество

$$S_m = \{\varphi \in \Phi^m \mid |\varphi^{(l)}(\theta)| \leqslant \Big(|a|+|b|+\int\limits_{-h}^{0} |g(\theta)|d\theta\Big)^l |\varphi(0)|, \theta \in [-h,0],\ l = 0,1,2...m\},$$

где $\Phi^m = PC([-h,0],R),$ для $m = 0,$ $\Phi^m = C^m([-h,0],R),$ для $m \neq 0.$

В работе [2] получен критерий экспоненциальной устойчивости уравнения (1):

Теорема 1. *Уравнение (1) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда существует непрерывный в нуле функционал $v_0(\varphi)$, удовлетворяющий следующим условиям:*

$$1)\ \frac{dv_0(x_t)}{dt} = -wx^2(t),\ w > 0 \ \ \text{вдоль решений уравнения } (1); \tag{2}$$

$$2)\ \text{существует } \alpha > 0 \text{ такое, что } v_0(\varphi) \geqslant \alpha\varphi^2(0) \text{ на функциях } \varphi \in S_m. \tag{3}$$

п. 1.3 Функционал и матрица Ляпунова

Функционал, удовлетворяющий условию (2) теоремы 1, представлен в работе [18], и выглядит следующим образом:

$$v_0(\varphi) = \varphi^2(0)u(0) + 2\varphi(0)\int_{-h}^{0}\left[bu(-h-\theta) + \int_{-h}^{\theta} u(\xi-\theta)g(\xi)d\xi\right]\varphi(\theta)d\theta +$$
$$+ \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\left[b^2u(\theta_1-\theta_2) + 2b\int_{-h}^{\theta_2} u(h+\theta_1-\theta_2+\xi_2)g(\xi_2)d\xi_2 +\right.$$
$$\left.+ \int_{-h}^{\theta_1}\int_{-h}^{\theta_2} u(\xi_2+\theta_1-\theta_2-\xi_1)g(\xi_1)g(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2\right]\varphi(\theta_1)\varphi(\theta_2)d\theta_1 d\theta_2, \qquad (4)$$

где $u(\tau)$ - матрица Ляпунова, ассоциированная с w.

Определение. Матрицей Ляпунова для уравнения (1), ассоциированной с w называется функция $u(\tau)$, для которой выполняются следующие свойства:

1. динамическое: для $\tau \geqslant 0$

$$u'(\tau) = au(\tau) + bu(\tau-h) + \int\limits_{-h}^{0} g(\theta)u(\tau+\theta)d\theta;$$

2. симметрическое: для $\tau \geqslant 0$

$$u(\tau) = u(-\tau);$$

3. алгебраическое:

$$-w = u'(+0) - u'(-0).$$

Матрица Ляпунова существует и единственна тогда и только тогда, когда выполняется условие Ляпунова, т. е. уравнение (1) не имеет двух собственных чисел, сумма которых равна нулю.

Замечание. В скалярном случае достаточно рассматривать $u_1(\tau)$ - матрицу Ляпунова, ассоциированную с $w = 1$, т.к. все матрицы Ляпунова, ассоцированные с другими w, можно получить следующим образом:

$$u_w(\tau) = wu_1(\tau).$$

п. 1.4 Вычисление матрицы Ляпунова

В работе [] вычисление матрицы Ляпунова сведёно к решению системы линейных дифференциальных уравнений без запаздывания с граничными условиями.

Пусть функция $g(\theta)$ уравнения (1) имеет вид:

$$g(\theta) = \sum_{j=1}^{m} c_j \theta^{j-1}, \tag{5}$$

где $c_j = \text{const}$. А $u(\tau)$ - матрица Ляпунова, ассоциированная с $w = 1$. Введём вспомогательные функции:

$$z(\tau) = u(\tau);$$

$$v(\tau) = u(\tau - h),\ \tau \in [-h, 0];$$

$$x_j(\tau) = \int\limits_{-h}^{0} \theta^j u(\tau + \theta) d\theta;$$

$$y_j(\tau) = (-1)^{j-1} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(j-1)!}{k!(j-k-1)!} h^k x_{j-k}(\tau);$$

$$C(\xi) = \sum_{j=1}^{m} (-\xi)^{j-1} c_j.$$

Тогда матрицей Ляпунова для уравнения (1) с подынтегральной функцией (5) будет являться функция $z(\tau)$ из решения следующей системы:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dz(\tau)}{d\tau} = az(\tau) + bv(\tau) + \sum\limits_{j=1}^{m} c_j x_j(\tau) \\[2ex]
\dfrac{dv(\tau)}{d\tau} = -bz(\tau) - av(\tau) - \sum\limits_{j=1}^{m} \left[\dfrac{1}{(j-1)!} C^{(j-1)}(h)\right] x_j(\tau) \\[2ex]
\dfrac{dx_1(\tau)}{d\tau} = z(\tau) - v(\tau) \\[2ex]
\dfrac{dx_j(\tau)}{d\tau} = -(-h)^{j-1} v(\tau) - (j-1) x_{j-1}(\tau),\ j = \overline{2, m}
\end{cases}
$$

с граничными условиями:

$$
\begin{cases}
z(0) = v(h) \\[2ex]
x_j(0) = y_j(h),\ j = \overline{1, m} \\[2ex]
az(0) + bz(h) + bv(0) + av(h) + \sum\limits_{j=1}^{m} c_j x_j(0) + \sum\limits_{j=1}^{m} c_j y_j(h) = -w
\end{cases}
$$

§2 Описание метода

Данный параграф посвящен описанию конструктивного метода анализа устойчивости уравнения (1), основанного на теореме 1. Идея метода заимствована из работ [Автоматика, диссертация] и заключается в следующем.

По построению функционал (4) удовлетворяет условию (2) теоремы 1, в таком случае остаётся проверить условие (3), т.е. положительную определённость этого функционала. Для этого построим его нижнюю оценку и проверим, является ли она положительной.

п. 2.1 Оценка погрешности приближения

Построим нижнюю оценку функционала. Для этого рассмотрим произвольную функцию φ и приблизим ее кусочно-линейной функцией.
Поскольку далее с использованием формулы Тейлора оценивается погрешность такого приближения, нам потребуется ограничение на вторую производную функции φ. Поэтому будем считать, что $\varphi \in S_2$. Это означает выполнение для неё условий:

$$\begin{aligned} |\varphi(\theta)| &\leqslant |\varphi(0)|; \\ |\varphi''(\theta)| &\leqslant \beta|\varphi(0)|, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\beta = \left(|a| + |b| + \int\limits_{-h}^{0} |g(\theta)| d\theta \right)^2.$
Разобьем отрезок $[-h, 0]$ на N частей точками $\theta_j = -j\delta,\ j = 0, 1, ...N,$ где $\delta = \frac{h}{N}$, таким образом, что

$$-h = \theta_N < \theta_{N-1} ... < \theta_0 = 0.$$

На каждом полученном отрезке $[\theta_{j+1}, \theta_j]$ приблизим функцию $\varphi(\theta)$ линейной функцией $l(\theta)$ такой, что для всех j будет выполняться равенство $l(\theta_j) = \varphi(\theta_j)$:

$$l(s + \theta_j) = \varphi(\theta_j) \left(1 + \frac{s}{\delta} \right) - \varphi(\theta_{j+1}) \frac{s}{\delta}; \quad s \in [-\delta, 0]. \tag{7}$$

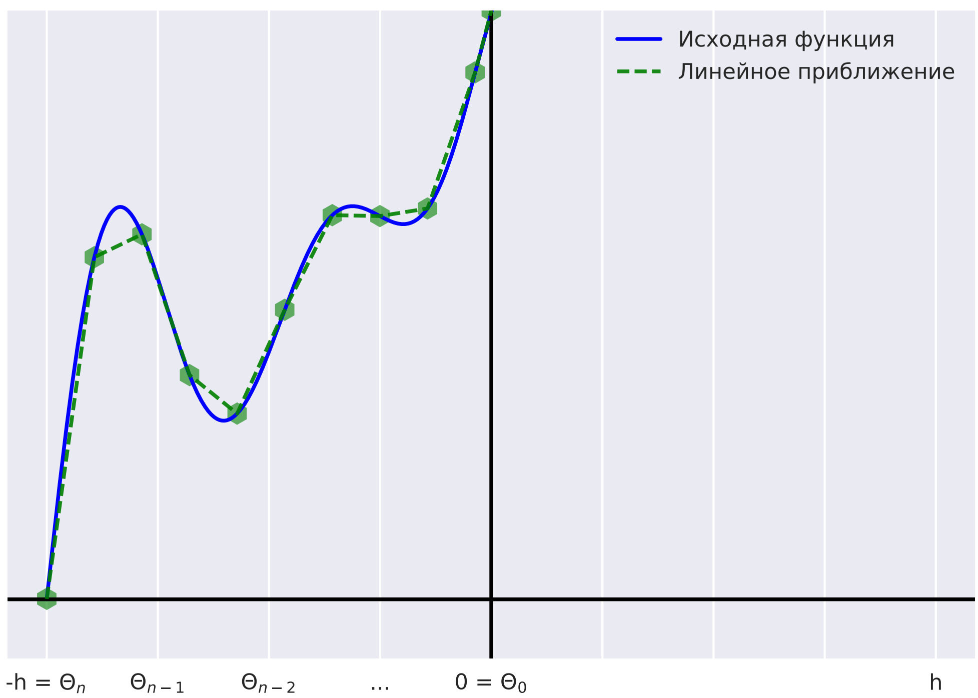

Рис. 1: Линейное приближение функции

Тогда оригинальная функция может быть представлена в виде суммы её линейного приближения и погрешности приближения $\eta(\theta)$:

$$\varphi(\theta) = l(\theta) + \eta(\theta) \tag{8}$$

Чтобы найти оценку погрешности, сперва выпишем её формулу:

$$\eta(s+\theta_j) = \varphi(s+\theta_j) - \left(\varphi(\theta_j)\left(1+\frac{s}{\delta}\right) - \varphi(\theta_{j+1})\frac{s}{\delta}\right), \quad s \in [-\delta, 0].$$

Затем, применив формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получим:

$$\varphi(s+\theta_j) = \varphi(\theta_j) + s\varphi^{'}(\theta_j) + \frac{s^2}{2}\varphi^{''}(\tau_j s + \theta_j);$$
$$\varphi(\theta_{j+1}) = \varphi(\theta_j) - \delta\varphi^{'}(\theta_j) + \frac{\delta^2}{2}\varphi^{''}(-\xi_j\delta + \theta_j),$$

$$\text{при } \tau_j, \xi_j \in (0,1), \ j = \overline{0, N-1}, \ s \in [-\delta, 0].$$

Подставим полученные значения в формулу погрешности:

$$\eta(s+\theta_j) = \frac{s^2}{2}\varphi''(\tau_j s+\theta_j) + \frac{\delta^2}{2}\varphi''(-\xi_j\delta+\theta_j),$$

$$\tau_j, \xi_j \in (0,1),\ j=\overline{0,N-1},\ s\in[-\delta,0].$$

И, наконец, используя условия (6) на функцию φ, получим оценку погрешности линейного приближения:

$$|\eta(s+\theta_j)| \leqslant \frac{1}{2}\,\beta\,|\varphi(0)|\left(s^2-\delta s\right). \tag{9}$$

п. 2.2 Оценка функционала

Перед тем, как построить оценку функционала v_0, введём следующие вспомогательные функции:

$$G_1(\theta) = bu(-h-\theta) + \int\limits_{-h}^{\theta} u(\xi-\theta)g(\xi)d\xi,\ \theta\in[-h,0];$$

$$G_2(\theta_1,\theta_2) = b^2u(\theta_1-\theta_2) + 2b\int\limits_{-h}^{\theta_2} u(h+\theta_1-\theta_2+\xi_2)g(\xi_2)d\xi_2 +$$

$$+\int\limits_{-h}^{\theta_1}\int\limits_{-h}^{\theta_2} g(\xi_1)u(\xi_2+\theta_1-\theta_2-\xi_1)g(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2.$$

Функционал v_0 состоит из трёх слагаемых, которые обозначим как I_1, I_2, I_3. Рассмотрим второе слагаемое:

$$I_2 = 2\varphi(0)\int\limits_{-h}^{0} G_1(\theta)\varphi(\theta)d\theta.$$

Разобьем интеграл на сумму в соответствии с разбиением промежутка:

$$I_2 = 2\varphi(0)\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{-(N-j+1)\delta}^{-(N-j)\delta} G_1(\theta)\varphi(\theta)d\theta,$$

Введем следующую замену переменных :

$$s = \theta + (N-j)\delta,\ \theta \in [-(N-j+1)\delta, -(N-j)\delta]$$

Тогда

$$I_2 = 2\varphi(0)\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{-\delta}^{0} G_1(s+\theta_{N-j})\varphi(s+\theta_{N-j})ds.$$

Подставим приближение (8) в формулу для I_2, получим

$$= 2\varphi(0)\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{-\delta}^{0} G_1(s+\theta_{N-j})\left[\varphi(\theta_{N-j})\left(1+\frac{s}{\delta}\right) - \varphi(\theta_{N-j+1})\frac{s}{\delta} + \eta(s+\theta_{N-j})\right] ds$$

$$= 2\varphi(0)\sum_{j=1}^{N}\left[L_j\varphi(\theta_{N-j}) + M_j\varphi(\theta_{N-j+1})\right] + \gamma_2,$$

где $G_1(s+\theta_{N-j}) = bu(-s-\delta j) + \int\limits_{-h}^{s+\theta_{N-j}} u(\xi - s - \theta_{N-j})g(\xi)d\xi;$

$$L_j = \int\limits_{-\delta}^{0} G_1(s+\theta_{N-j})\left(1+\frac{s}{\delta}\right) ds;$$

$$M_j = \int\limits_{-\delta}^{0} G_1(s+\theta_{N-j})\left(-\frac{s}{\delta}\right) ds;$$

$$\gamma_2 = 2\varphi(0)\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{-\delta}^{0} G_1(s+\theta_{N-j})\eta(s+\theta_{N-j})ds.$$

Третье слагаемое функционала v_0:

$$I_3 = \int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{-h}^{0} G_2(\theta_1,\theta_2)\varphi(\theta_1)\varphi(\theta_2)d\theta_1 d\theta_2,$$

Разбив интеграл на сумму, получим

$$I_3 = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{-(N-j+1)\delta}^{-(N-j)\delta} \int\limits_{-(N-k+1)\delta}^{-(N-k)\delta} G_2(\varphi_1, \varphi_2)\varphi(\theta_1)\varphi(\theta_2)d\theta_1 d\theta_2.$$

Произведём следующую замену переменных:

$$s_1 = \theta_1 + (N-k)\delta,\ \theta_1 \in [-(N-k+1)\delta, -(N-k)\delta],$$

$$s_2 = \theta_2 + (N-j)\delta,\ \theta_2 \in [-(N-j+1)\delta, -(N-j)\delta]$$

Получим следующее представление для I_3:

$$I_3 = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{-\delta}^{0} \int\limits_{-\delta}^{0} G_2(s_1 + \theta_{N-k}, s_2 + \theta_{N-j})\varphi(s_1 + \theta_{N-k})\varphi(s_2 + \theta_{N-j})ds_1 ds_2,$$

где внутренняя сумма

$$G_2(s_1 + \theta_{N-k}, s_2 + \theta_{N-j}) = b^2 u(s_1 - s_2 + (k-j)\delta) +$$

$$+2b \int\limits_{-h}^{s_2+\theta_{N-j}} u(h + s_1 - s_2 + (k-j)\delta + \xi_2)g(\xi_2)d\xi_2 +$$

$$+ \int\limits_{-h}^{s_1+\theta_{N-k}} \int\limits_{-h}^{s_2+\theta_{N-j}} g(\xi_1)u(\xi_2 + s_1 - s_2 + (k-j)\delta - \xi_1)g(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2.$$

Используем представление (8) для φ:

$$I_3 = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{-\delta}^{0} \int\limits_{-\delta}^{0} \left[\varphi(\theta_{N-k})\left(1 + \frac{s_1}{\delta}\right) - \varphi(\theta_{N-k+1})\frac{s_1}{\delta} + \eta(s_1 + \theta_{N-k})\right] \times$$

$$\times G_2(s_1 + \theta_{N-k}, s_2 + \theta_{N-j}) \times$$

$$\times \left[\varphi(\theta_{N-j})\left(1 + \frac{s_2}{\delta}\right) - \varphi(\theta_{N-j+1})\frac{s_2}{\delta} + \eta(s_2 + \theta_{N-j})\right] ds_1 ds_2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{-\delta}^{0} \int\limits_{-\delta}^{0} G_2(s_1{+}\theta_{N-k}, s_2{+}\theta_{N-j}) \Bigg\{ \varphi(\theta_{N-k}) \left(1 + \frac{s_1}{\delta}\right) \varphi(\theta_{N-j}) \left(1 + \frac{s_2}{\delta}\right) -$$

$$-2\varphi(\theta_{N-k}) \left(1 + \frac{s_1}{\delta}\right) \varphi(\theta_{N-j+1}) \frac{s_2}{\delta} + \varphi(\theta_{N-k+1}) \frac{s_1 s_2}{\delta^2} \varphi(\theta_{N-j+1}) +$$

$$+2\eta(s_1{+}\theta_{N-k}) \left[\varphi(\theta_{N-j}) \left(1 + \frac{s_2}{\delta}\right) - \varphi(\theta_{N-j+1}) \frac{s_2}{\delta}\right] {+}\eta(s_1{+}\theta_{N-k})\eta(s_2{+}\theta_{N-j}) \Bigg\} ds_1 ds_2.$$

$$I_3 = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \Big[P_{kj} \varphi(\theta_{N-k}) \varphi(\theta_{N-j}) +$$

$$+2Q_{kj} \varphi(\theta_{N-k}) \varphi(\theta_{N-j+1}) + R_{kj} \varphi(\theta_{N-k+1}) \varphi(\theta_{N-j+1}) \Big] + \gamma_3,$$

$$\text{где } P_{kj} = \int\limits_{-\delta}^{0} \int\limits_{-\delta}^{0} (1 + \frac{s_1}{\delta})(1 + \frac{s_2}{\delta}) G_2(s_1 + \theta_{N-k}, s_2 + \theta_{N-j}) ds_1 ds_2;$$

$$Q_{kj} = \int\limits_{-\delta}^{0} \int\limits_{-\delta}^{0} (1 + \frac{s_1}{\delta})(-\frac{s_2}{\delta}) G_2(s_1 + \theta_{N-k}, s_2 + \theta_{N-j}) ds_1 ds_2;$$

$$R_{kj} = \int\limits_{-\delta}^{0} \int\limits_{-\delta}^{0} \frac{s_1 s_2}{\delta^2} G_2(s_1 + \theta_{N-k}, s_2 + \theta_{N-j}) ds_1 ds_2;$$

$$\gamma_3 = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{-\delta}^{0} \int\limits_{-\delta}^{0} \Big[\eta(s_1 + \theta_{N-k}) \eta(s_2 + \theta_{N-j}) +$$

$$+2 \left[\varphi(\theta_{N-j})(1 + \frac{s_2}{\delta}) - \varphi(\theta_{N-j+1}) \frac{s_2}{\delta} \right] \eta(s_1 + \theta_{N-k}) \Big] \times$$

$$\times G_2(s_1 + \theta_{N-k}, s_2 + \theta_{N-j}) ds_1 ds_2.$$

Оценим снизу слагаемые функционала v_0, зависящие от погрешности, используя неравенства (6):

$$|\gamma_2| \leqslant 2|\varphi(0)| \sum_{j=1}^{N} \int_{-\delta}^{0} |G_1(s+\theta_{N-j})| \cdot |\eta(s+\theta_{N-j})| ds$$

$$\gamma_2 \geqslant -\beta\, (\varphi(0))^2 \sum_{j=1}^{N} \int_{-\delta}^{0} |G_1(s,j)| \left(s^2 - \delta s\right) ds$$

$$|\gamma_3| \leqslant$$

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \int_{-\delta}^{0} \int_{-\delta}^{0} [|\eta(s_1+\theta_{N-k})| \cdot |\eta(s_2+\theta_{N-j})| + 2 \left[|\varphi(\theta_{N-j})| \cdot |1 + \frac{s_2}{\delta}| + |\varphi(\theta_{N-j+1})| \cdot |\frac{s_2}{\delta}| \right]$$

$$\times |G_2(s_1+\theta_{N-k}, s_2+\theta_{N-j})| ds_1 ds_2$$

$$\gamma_3 \geqslant -\frac{1}{2}\, \beta\, \varphi^2(0) \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \int_{-\delta}^{0} \int_{-\delta}^{0} (s_1^2 - s_1\delta) \left[\frac{1}{2}\, \beta\, (s_2^2 - s_2\delta) + 2 \right] \times$$

$$\times |G_2(s_1+\theta_{N-k}, s_2+\theta_{N-j})| ds_1 ds_2$$

Таким образом получим оценку:

$$v_0(\varphi) \geqslant v(l) - \psi \varphi^2(0), \tag{10}$$

где $v_0(l) = \varphi^2(0) u(0) + 2\varphi(0) \sum\limits_{j=1}^{N} [L_j \varphi(\theta_{N-j}) + M_j \varphi(\theta_{N-j+1})] +$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} [P_{kj} \varphi(\theta_{N-k}) \varphi(\theta_{N-j}) + 2Q_{kj} \varphi(\theta_{N-k}) \varphi(\theta_{N-j+1}) + R_{kj} \varphi(\theta_{N-k+1}) \varphi(\theta_{N-j+1})] \tag{11}$$

— функционал от кусочно-линейной функции $l(\theta)$ без учета погрешности, а сама погрешность выглядит следующим образом:

$$\psi = \beta \sum_{j=1}^{N} \int_{-\delta}^{0} |G_1(s+\theta_{N-j})| \left(s^2 - \delta s\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\beta \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \int_{-\delta}^{0}\int_{-\delta}^{0} (s_1^2 - s_1\delta) \left[\frac{1}{2}\beta\,(s_2^2 - s_2\delta) + 2\right] |G(s_1+\theta_{N-k}, s_2+\theta_{N-j})| ds_1 ds_2.$$

Введём два вектора размерностей $N+1$ и N соответственно:

$$\widehat{\xi} = (\varphi(0), \varphi(\theta_1),\ ..., \varphi(\theta_N))^T \text{ и } \widehat{\varphi} = (\varphi(\theta_1),\ ..., \varphi(\theta_N))^T.$$

Теперь $v_0(l)$ является квадратичной формой от вектора $\widehat{\xi}$. Тогда, применив простые преобразования, можем выделить слагаемые с компонентой $\varphi(0)$ в уравнении (11):

$$v_0(l) = [u(0) + 2L_N + P_{NN}]\varphi^2(0) +$$

$$+2\varphi(0)\left[\sum_{j=1}^{N-1}(L_j + P_{Nj})\varphi(\theta_{N-j}) + \sum_{j=1}^{N}(M_j + Q_{Nj})\varphi(\theta_{N-j+1})\right] +$$

$$+\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{N-1} P_{kj}\varphi(\theta_{N-k})\varphi(\theta_{N-j}) + 2\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N-1} Q_{kj}\varphi(\theta_{N-k})\varphi(\theta_{N-j+1}) +$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} R_{kj}\varphi(\theta_{N-k+1})\varphi(\theta_{N-j+1}).$$

Тогда оценка (10) будет иметь вид:

$$v_0(\varphi) \geqslant (\lambda_1 - \psi)\varphi^2(0) + 2\varphi(0)\lambda_2\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi}^T\Lambda_3\widehat{\varphi}, \tag{12}$$

где $\lambda_1 = u(0) + 2L_N + P_{NN}$, λ_2 и Λ_3 — строка размерности N и матрица $N \times N$ соответственно — определены последней формулой для $v_0(l)$.

п. 2.3 Основной результат

Для устойчивости уравнения (1) достаточно положительности этой оценки на ненулевых функциях, удовлетворяющих первому условию из (6).

Теорема 2. *Если существует такое N, что*
$\min\limits_{\widehat{\varphi}\in\widehat{S}_N} \left[\lambda_1 - \psi + 2\lambda_2\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi}^T\Lambda_3\widehat{\varphi}\right] > 0,$
где $\widehat{S}_N = \{\widehat{\varphi} \in R^N \mid |\widehat{\varphi}_j| \leqslant 1, j = \overline{1,N}\}$, *то уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. Оценка функционала $v_0(\varphi)$ доказана выше и связана с $\varphi(0)$, причём функции $\varphi \in S_2$. Рассмотрим отдельно два случая: $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(0) \neq 0$. В первом случае $v_0(\varphi) = 0$, т.к. φ — нулевая функция.
Во втором же случае всегда выполняется

$$v_0(\varphi) \geqslant \min_{|\varphi(\theta_j)|\leqslant|\varphi(0)|, j=\overline{1,N}} (\lambda_1 - \psi)\varphi^2(0) + 2\varphi(0)\lambda_2\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi}^T\Lambda_3\widehat{\varphi}$$

Такой минимум всегда существует. Вынесем $\varphi(0)$ за знак минимума, получим

$$v_0(\varphi) \geqslant \min_{\widehat{\varphi}\in\widehat{S}_N} \left[\lambda_1 - \psi + 2\lambda_2\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi}^T\Lambda_3\widehat{\varphi}\right]\varphi^2(0)$$

А по условию Теоремы 2

$$\min_{\widehat{\varphi}\in\widehat{S}_N} \left[\lambda_1 - \psi + 2\lambda_2\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi}^T\Lambda_3\widehat{\varphi}\right] > 0$$

и к тому же $\varphi(0) \neq 0$. Таким образом в обоих рассмотренных случаях функционал $v_0(\varphi)$ допускает квадратичную оценку снизу, что по Теореме 1 эквивалентно экспоненциальной устойчивости уравнения (1). ■

В работе [4] доказаны следующие необходимые условия устойчивости:

Утверждение. *Если уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво, то выполняются следующие условия:*

1. $u(0) > 0$

2. $\lambda_1 > 0$

3. $\lambda_1 + 2\lambda_2\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi}^T\Lambda_3\widehat{\varphi} > 0$

Для повышения вычислительной эффективности алгоритма эти условия проверяются отдельно, перед вычислением минимума из теоремы 2.

§3 Пример

Рассмотрим исследуемый в работе подход на практическом примере. Метод D-разбиений [21] позволит нам разделить исследуемое пространство параметров на области устойчивости и неустойчивости. В каждой точке произвольной области алгоритм должен заавершиться с одинаковым результатом, зависящим от типа данной области.

Для проведения экспериментов в рамках данной работы был реализован программный комплекс на языке MATLAB, который в автоматическом режиме способен запускать рассматриваемый в работе метод анализа устойчивости для произвольной точки. Язык MATLAB, будучи современным высокоуровневым интерпретируемым языком для научных вычислений, отлично подходит для реализации рассматриваемого метода, так как содержит точные и оптимизированные реализации всех необходимых численных методов, таких как численное интегрирование, дифферинцирование и минимизация и позволяет быстро реализовать сложный вычислительный алгоритм, используя небольшое количество кода.

В работе используется следующий алгоритм проверки метода:

1. Выбрать рассматриваемое уравнение.

2. Вручную применить к рассматриваемому уравнению метод D-разбиений и отобразить на графике полученные области.

3. Задаться границами рассматриваемой области $a_{\min}$, $a_{\max}$, $b_{\min}$, $b_{\max}$ и количеством точек в разбиении M_a, M_b.

4. Построить множество пар

$$\begin{aligned}
&T = \left\{(a_{\min} + (a_{\max} - a_{\min})i_a, b_{\min} + (b_{\max} - b_{\min})i_b)\right\},\\
&i_a \in \{1, \ldots, M_a\},\\
&i_b \in \{1, \ldots, M_b\}.
\end{aligned}$$

5. Параллельно для каждой пары из T запустить рассматриваемый метод и выполнить одно из следующих действий в зависимости от результата:

   (a) Если точка не устойчива, отметить её на графике чёрной точкой.

(b) Если точка устойчива, отметить её на графике красным крестом.

(c) Если для точки не установлена устойчивость, но может быть установлена при большем N, отметить её чёрным крестом.

Для примера рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b\int\limits_{-h}^{0} x(t+\theta)d\theta. \tag{13}$$

Результат применения к нему изложенного выше алгоритма изображён на рисунках 2 и 3 для $N = 5$ и $N = 20$ соответственно. Исходя из результатов практической проверки можно сделать следующие выводы:

1. Области устойчивости и неустойчивости определены правильно.

2. С увеличением N всё больше точек становятся «определённо» устойчивыми.

При $N = 5$ красным были отмечены 28 точек, при $N = 20$ уже 66, что на 57% больше и составляет 78% от общего числа рассматриваемых точек в данной области.

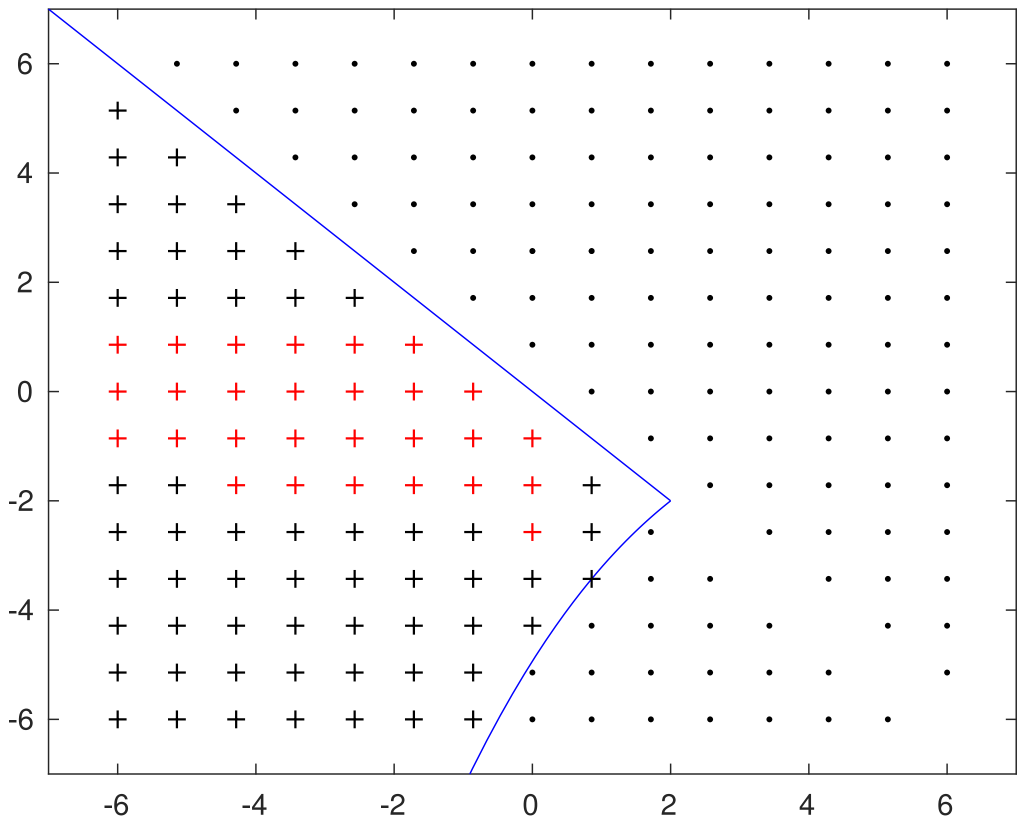

Рис. 2: Оценка экспоненциальной устойчисвости при $N = 5$

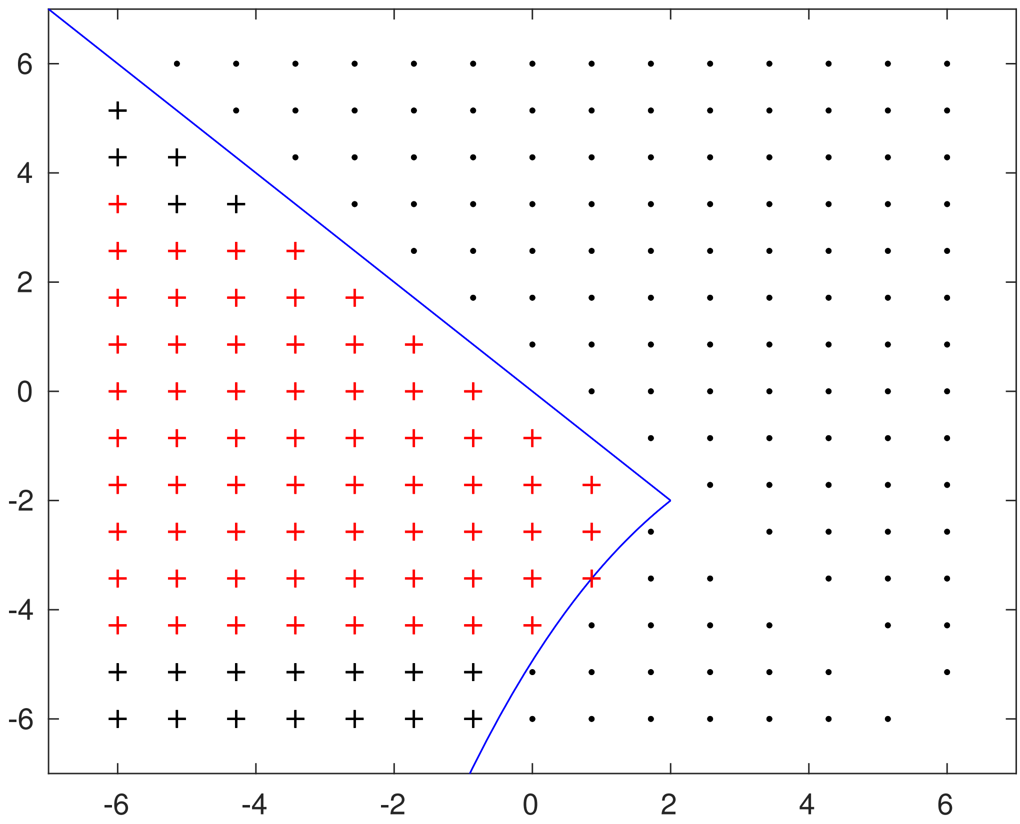

Рис. 3: Оценка экспоненциальной устойчисвости при $N = 20$

Выводы

В рамках проведённого исследования можно заключить, что все поставленные задачи были выполнены в полном объёме. Можно отметить следующие ключевые аспекты работы:

1. Конструктивный метод анализа экспоненциальной устойчисвости был распространён на класс линейных уравнений с распределённым запаздыванием.

2. Были приведены необходимые условия экспоненциальной устойчивости уравнения в рамках данного метода.

3. Реализован программный комплекс на языке MATLAB для проверки и демонстрации работы метода.

4. Метод проверен на искуственном примере и показана его стабильная работа и выполнение заявленных свойств.

Заключение

Исследование показало, что поставленная задача является выполнимой и конструктивный метод анализа экспоненциальной устойчивости [4–6] может быть распространён на класс линеных уравнений с распределённым запаздываеием.

Следующим этапом в данном исследовании станет изучение возможности обобщения данного метода на случай систем дифференциальных уравнений с распределённым запаздыванием, а так же замена линейного приближения функционала на кубическое, что, исходя из проведённых ранее исследований [4], может улучшить точность метода.

Список литературы

[1] Hutchinson G. E. An introduction to population ecology. – 1978.

[2] Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

[3] Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems //Automatica. – 2003. – Т. 39. – №. 1. – С. 15-20.

[4] Медведева И. В. Конструктивные методы анализа экспоненциальной устойчивости линейных систем запаздывающего типа: дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб., 2014. 150 с.

[5] Medvedeva I. V., Zhabko A. P. Synthesis of Razumikhin and Lyapunov–Krasovskii approaches to stability analysis of time-delay systems// Automatica. 2015. Vol. 51. P. 372–377.

[6] Медведева И. В., Жабко А. П. Анализ устойчивости линейных систем с распределённым запаздыванием // Теория управления и математическое моделирование: Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова (Ижевск, Россия, 9–11 июня 2015 г.). Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет». 2015. С. 95-–96.

[7] Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1972. 352 с.

[8] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения / Пер. с англ. Под ред. Л. Э. Эльсгольца. М., 1967. 548 с.

[9] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. 472 с.

[10] Gu K., Chen J., Kharitonov V. L. Stability of time-delay systems. – Springer Science & Business Media, 2003.

[11] Красовский Н. Н. О применении второго метода Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 3. С. 315–327.

[12] Репин Ю. М. Квадратичные функционалы Ляпунова для систем с запазды- ванием // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29. № 3. С. 564–566.

[13] Datko R. An algorithm for computing Liapunov functionals for some differentialdifference equations // Ordinary Differential Equations / Ed. by L.Weiss. New York. 1972. P. 387–398.

[14] Infante E. F., Castelan W. B. A Liapunov functional for a matrix differencedifferential equation // Journal of Differential Equations. 1978. Vol. 29. P. 439– 451.

[15] Huang W. Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay systems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1989. Vol. 142. P. 83–94.

[16] Gu K., Chen J., Kharitonov V. L. Stability of time-delay systems. – Springer Science & Business Media, 2003.

[17] Santos O., Kharitonov V. L., Mondié S. Quadratic functional for systems with distributed time delays // 16th Triennial World Congress. Prague, Czech Republic. 2005. P. 454–459.

[18] Kharitonov V. L. Lyapunov matrices for a class of time delay systems // Systems and Control Letters. 2006. Vol. 55. P. 610–617.

[19] Чашников М. В. Анализ устойчивости линейных систем с запаздывающим аргументом: дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб., 2010. 94 с.

[20] Kharitonov V. L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Boston: Birkhäuser, 2013. 311 p.

[21] Неймарк Ю. И. D-разбиение пространства квазиполиномов (к устойчивости линеаризованных распределенных систем) // Прикладная математика и механика. 1949. Т. 4. С. 349–380.